

**На правах рукописи**



**Егоров Даниил Леонидович**

**КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПЛАСТИН  
НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ С ЖЕСТКИМИ ТЕЛАМИ**

**01.02.04 – механика деформируемого твердого тела**

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Казань – 2011

Работа выполнена в ФГАОУ ВПО  
«Казанский (Приволжский) федеральный университет»

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук,  
доцент **Кузнецов Сергей Аркадьевич**

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,  
профессор **Гурьянов Николай Георгиевич**  
  
кандидат физико-математических наук,  
доцент **Клейдман Ольга Владимировна**

Ведущая организация: ФГБОУ ВПО «Казанский национальный  
исследовательский технологический  
университет»

Защита состоится 28 декабря 2011 г. в 14 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.11 при Казанском (Приволжском) федеральном университете, расположенном по адресу: 420008, Казань, ул. Кремлевская, 18.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета.

Автореферат разослан      «    » ноября 2011 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета



Саченков А.А.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность работы.** Задачи контактного взаимодействия представляют одну из важнейших областей современной механики деформируемого твердого тела. Составные части любой реальной конструкции взаимодействуют друг с другом, а также с другими объектами. Это может быть непосредственный контакт тел в результате прижатия к опоре, сварочного, болтового или клеевого соединения и т.д. Учесть влияние таких взаимодействий, а также определить область контакта, если она неизвестна, позволяет решение соответствующих контактных задач, что является важным этапом проектирования различных узлов конструкций, тем более что концентрация контактных напряжений может привести к разрушению материала.

Особую актуальность исследование механики контактного взаимодействия имеет в случае контакта тонкостенных элементов конструкций с упругими или жесткими телами, так как тонкостенные конструкции имеют высокую прочность и малый удельный вес, что делает их привлекательными для широкого использования в авиации, автомобилестроении, ракетной технике, строительстве и т.д. Однако, они слабо сопротивляются сосредоточенным нагрузкам, поэтому их обычно подкрепляют ребрами или малыми накладками.

Построение аналитического решения контактной задачи имеет большой теоретический и практический интерес, однако, связано с серьезными математическими трудностями и не всегда представляется возможным. Поэтому актуальной проблемой является разработка и совершенствование новых численных и численно-аналитических методик решения контактных задач.

**Цель работы.** Разработка универсальной и достаточно простой в использовании численно-аналитической методики решения задач контактного взаимодействия пластин на упругом основании с жесткими телами (штампами) и применение данной методики к решению новых контактных задач.

**Научная новизна.** Разработан новый метод решения двумерных статических задач контактного взаимодействия. Данный метод реализован в виде компьютерной программы, и с помощью нее впервые получены решения задач взаимодействия пластины на упругом основании со штампами различных форм: сектор, сектор кольца, прямоугольный штамп с вырезами, крестообразный штамп и т.д.

**Практическая значимость.** Представленная в работе численно-аналитическая методика может быть применена для решения задач контактного взаимодействия упругих и жестких тел, возникающих при моделировании реальных тонкостенных конструкций.

**Достоверность полученных результатов** обеспечивается: корректной математической постановкой задачи; использованием при численном решении интегрального уравнения точного аналитического представления функции влияния; тщательным тестированием отдельных вычислительных модулей, реализующих алгоритм численного решения; – и подтверждается физической непротиворечивостью: поля распределения напряжений в каждой конкретной решенной задаче не содержат необъяснимых механических эффектов, а также совпадением картин распределения контактных напряжений в задаче для круглого

штампа с полями, полученными ранее С.А. Кузнецовым на основе аналитического решения уравнения контакта.

**Личный вклад автора.** Автор диссертации участвовал в разработке представленной в работе численной методики решения контактных задач, а также самостоятельно реализовал эту методику в виде компьютерной программы. Автору принадлежит постановка ряда новых контактных задач, их решение и анализ полученных результатов.

**Апробация работы.** Результаты диссертации были представлены на итоговых конференциях Казанского (Приволжского) федерального университета (Казань, 2006–2011 гг.); международном семинаре, посвященном памяти заслуженного деятеля науки ТАССР проф. А.В. Саченкова «Актуальные проблемы нелинейной механики оболочек» (Казань, 2008 г.); X-м, XII-м и XIII-м международных семинарах «Супервычисления и математическое моделирование» (РФЯЦ-ВНИИЭФ, г. Саров, 2008 г., 2010 г., 2011 г.); Второй международной конференции «Проблемы нелинейной механики деформируемого твердого тела» (Казань, 2009 г.); молодежной научной школе-конференции «Лобачевские чтения» (Казань, 2007 г., 2010 г.); международных студенческо-аспирантских форумах «Актуализация социально-экономического и естественно-научного образования в науке и предпринимательстве» (Казань, 2009 г., 2010 г.) и «Научная и информационно-аналитическая база инновационного предпринимательства» (Казань, 2011 г.); объединенном семинаре кафедры теоретической механики Казанского (Приволжского) федерального университета и Лаборатории механики оболочек НИИММ им. Н.Г. Чеботарева КФУ (Казань, 2011); международной научно-практической конференции «Актуальные проблемы естественных и гуманитарных наук» (Зеленодольск, 2011 г.)

**Публикации.** По материалам диссертационной работы имеются 11 публикаций, в том числе 2 статьи в журналах, входящих в перечень ВАК Министерства образования и науки РФ: 1 статья в «Ученых записках Казанского университета» и 1 статья в «Научно-техническом вестнике Поволжья», а также 6 других статей и 3 информативных тезисов докладов на международных и Всероссийских конференциях.

**Структура диссертационной работы.** Диссертация изложена на 101 странице, содержит 9 таблиц, 72 рисунка, список литературы включает 117 наименований. Работа содержит введение, 2 главы, раздел «Заключение» и список литературы. Во введении обоснована актуальность темы работы и представлен обзор публикаций по механике контактного взаимодействия, где основное внимание уделено работам, выполненным за последние годы. В первой главе представлена постановка задачи и основное разрешающее уравнение. Проведено построение функции влияния для решения уравнения изгиба круглой пластины. Подробно описана численно-аналитическая методика решения двумерных статических контактных задач, а также ее применение в различных частных случаях. Приведены результаты численных экспериментов на сходимость расчетной схемы. Вторая глава посвящена результатам решения конкретных контактных задач и их подробному обсуждению. Рассматриваются различные формы штампов, исследуется влияние условий на границе пластины (свободный край,

шарнирное закрепление, жесткая заделка), эксцентриситета положения штампа и угла его поворота.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Для решения контактных задач существует два основных приема:

1. уравнения равновесия решаются внутри области контакта и вне ее, а контактное давление определяется из условий стыковки решений на границе и поверхности контакта;
2. контактное давление определяется в результате построения и решения интегрального уравнения.

Первый прием во многих случаях сопряжен с достаточно большими математическими трудностями. Реализация второго приема представляет меньше сложностей, если построена функция Грина (функция влияния).

Важным этапом постановки и решения контактных задач теории пластин и оболочек является вопрос выбора соответствующей теории. Постановка контактных задач для тонкостенных элементов конструкций на основе классической теории Кирхгофа-Лява приводит к интегральным уравнениям контакта Фредгольма 1 рода, задача отыскания решения которых является математически некорректной. Учет в области контакта сжимаемости нормали к срединной поверхности приводит задачу к уравнениям Фредгольма 2 рода и позволяет получить контактные напряжения, мало отличающиеся от напряжений, вычисляемых по точным уравнениям теории упругости. Согласно такой постановке задачи, условия контакта поверхности штампа и пластины в области контакта  $\Omega$  записываются в виде интегрального уравнения

$$k_0 \sigma(\alpha_1, \beta_1) + \iint_{\Omega} G(\alpha_1, \beta_1, \xi_1, \eta_1) \sigma(\xi_1, \eta_1) d\Omega = f(\alpha_1, \beta_1), \quad (\alpha_1, \beta_1), (\xi_1, \eta_1) \in \Omega \quad (1)$$

Здесь  $\sigma(\alpha_1, \beta_1)$  – неизвестное контактное давление,  $G(\alpha_1, \beta_1, \xi_1, \eta_1)$  – функция влияния,  $k_0$  – коэффициент обжатия,  $h$  – толщина пластины,  $f(\alpha_1, \beta_1)$  – функция формы и жесткого смещения штампа,  $\alpha_1, \beta_1$  – некоторая система координат, связанная со штампом. Интеграл по области контакта  $\Omega$  моделирует изгиб срединной поверхности пластины,  $k_0 \sigma(\alpha_1, \beta_1)$  – перемещения поверхности пластины в результате местного обжатия.

Геометрия взаимодействующих тел зачастую такова, что искать функцию влияния удобнее в системе координат  $\alpha_2, \beta_2$ , связанной с пластиной, поскольку в этой системе координат проще сформулировать граничные условия для искомой функции и удовлетворить им.

Если функция влияния найдена и известны формулы перехода от системы координат  $\alpha_2, \beta_2$  к  $\alpha_1, \beta_1$ , то алгоритм решения уравнения (1) заключается в следующем. Область контакта покрывается сеткой топологических прямоугольников, в каждом из которых проводится интегрирование с помощью квадратурной формулы Гаусса. Требуя выполнения условия контакта пластины и штампа в каждой квадратурной точке, сведем проблему определения значений контактного давления в узлах сетки к решению системы линейных алгебраических уравнений:

$$k_0 \sigma(\alpha_{1spq}, \beta_{1tpq}) + \sum_{k=1}^{h_{\alpha_1}} \sum_{l=1}^{h_{\beta_1}} (b_{kl} - a_{kl})(d_{kl} - c_{kl}) \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N G(\alpha_{1spq}, \beta_{1tpq}, \xi_{1ikl}, \eta_{1jkl}) \sigma(\xi_{1ikl}, \eta_{1jkl}) A_i A_j =$$

$$= f(\alpha_{1spq}, \beta_{1tpq}) \quad (2)$$

Здесь  $A_i$  – весовые множители квадратурной формулы Гаусса;  $h_{\alpha_1}, h_{\beta_1}$  – количество фрагментов разбиения сетки по осям  $\alpha_1$  и  $\beta_1$  соответственно;  $N$  – количество точек в квадратурной формуле Гаусса;  $s, t = 1, 2, \dots, N$ ;  $p = 1, 2, \dots, h_{\alpha_1}$ ;  $q = 1, 2, \dots, h_{\beta_1}$ .

Таким образом, задача отыскания контактного давления будет решена, если построена функция влияния для данной формы пластины.

Рассмотрим случай круглой пластины радиуса  $R$ , лежащей на упругом основании с одним коэффициентом постели  $k$ . Функция влияния для данной пластины является (при заданных граничных условиях) решением уравнения

$$\nabla^4 G(r, \varphi, \xi, \eta) + \lambda^4 G(r, \varphi, \xi, \eta) = \frac{1}{D_\xi} \delta(r - \xi, \varphi - \eta) \quad (3)$$

где  $\lambda^4 = \frac{k}{D}$ ,  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ ,  $E$  – модуль упругости,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $\delta(r - \xi, \varphi - \eta)$  –  $\delta$ -функция Дирака.

Решение уравнения (3) ищется в виде ряда Фурье

$$G(r, \varphi, \xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} {}'G_n(r, \xi) \cos(\varphi - \eta), \quad (4)$$

где символ  $\sum'$  означает, что при  $n=0$  вводится коэффициент  $\frac{1}{2}$ .

В интервале  $(-\pi, \pi)$   $\delta$ -функция представима рядом Фурье

$$\delta(\varphi - \eta) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} {}'\cos n(\varphi - \eta) \quad (5)$$

Подставив (4) и (5) в (3), получим уравнение

$$(\nabla_n^4 + \lambda^4) G_n(r, \xi) = \frac{1}{\pi D_\xi} \delta(r - \xi), \quad n = 0, 1, \dots \quad (6)$$

$$\text{где } \nabla_n^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2}.$$

*Лемма.* Решение дифференциального уравнения вида

$$(\nabla^4 + \lambda^4) F(r, \varphi) = \Phi(r, \varphi) \quad (7)$$

можно представить в виде

$$F(r, \varphi) = F_1(r, \varphi) + F_2(r, \varphi) \quad (8)$$

где  $F_1(r, \varphi)$  и  $F_2(r, \varphi)$  являются решениями уравнений

$$(\nabla^2 + i\lambda^2) F_1(r, \varphi) = -\frac{1}{2i\lambda^2} \Phi(r, \varphi)$$

$$(\nabla^2 - i\lambda^2) F_2(r, \varphi) = \frac{1}{2i\lambda^2} \Phi(r, \varphi)$$

Лемма доказывается простой подстановкой решения (8) в уравнение (7).

С учетом леммы задача построения функции влияния сводится к двум уравнениям Бесселя

$$\frac{d^2 G_{1n}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dG_{1n}}{dr} + (i\lambda^2 - \frac{n^2}{r^2})G_{1n} = -\frac{1}{2i\lambda^2 \pi D \xi} \delta(r - \xi), \quad (9)$$

$$\frac{d^2 G_{2n}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dG_{2n}}{dr} - (i\lambda^2 + \frac{n^2}{r^2})G_{2n} = \frac{1}{2i\lambda^2 \pi D \xi} \delta(r - \xi), \quad (10)$$

С учетом условия ограниченности прогиба в центре пластины и особенности поведения цилиндрических функций при  $r \rightarrow 0$ , общее решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (6), записывается в виде

$$G_o = C_1 J_n(\sqrt{i}\lambda r) + C_2 I_n(\sqrt{i}\lambda r),$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – неизвестные константы.

Частные решения уравнений (9), (10) найдем с помощью интегрального преобразования Ганкеля, с учетом свойств которого, а также с учетом фильтрующих свойств  $\delta$ -функции, получим образы функций  $\tilde{G}_{1n}$ ,  $\tilde{G}_{2n}$ . Обращая преобразование и складывая получившиеся оригиналы функций, будем иметь:

$$\tilde{G}_n(r, \xi) = \frac{1}{2\lambda^2 D} \begin{cases} v_n(\lambda r) f_n(\lambda \xi) - u_n(\lambda r) g_n(\lambda \xi), & 0 < r \leq \xi \\ v_n(\lambda \xi) f_n(\lambda r) - u_n(\lambda \xi) g_n(\lambda r), & \xi \leq r \end{cases}$$

где  $u_n(z) = ber_n(z)$ ,  $v_n(z) = -bei_n(z)$ ,  $f_n(z) = -hei_n(z)$ ,  $g_n(z) = her_n(z)$  – функции Кельвина.

Таким образом, общее решение уравнения (6) есть

$$G_n(r, \xi) = C_{1n}(\xi) u_n(\lambda r) + C_{2n}(\xi) v_n(\lambda r) + \frac{1}{2\lambda^2 D} \begin{cases} v_n(\lambda r) f_n(\lambda \xi) - u_n(\lambda r) g_n(\lambda \xi), & 0 < r \leq \xi \\ v_n(\lambda \xi) f_n(\lambda r) - u_n(\lambda \xi) g_n(\lambda r), & \xi \leq r \end{cases}$$

Постоянные интегрирования определяются из условий на контуре пластины при  $r = R$ .

Рассмотрим применение изложенной выше методики к решению конкретных задач. Пусть круглая пластина на упругом основании взаимодействует с плоским штампом, который имеет форму сектора кольца (рис. 1). Отметим, что при данном подходе частными случаями являются задачи для штампов в форме сектора, круга, а также в форме кольца.

Будем определять положение штампа с помощью эксцентриситета  $e$ , выбранного как расстояние от центра пластины  $O$  до точки  $O_1$ , которая является центром круга при  $a_1 = 0$ ,  $a_2 > 0$ ,  $\theta_1 = -\pi$ ,  $\theta_2 = \pi$ . Целесообразно в качестве  $\alpha_1, \beta_1$  выбрать полярную систему координат  $\rho, \chi$  с центром в точке  $O_1$ . Тогда имеем

$$r \cos \varphi = e + \rho \cos \chi, \quad r \sin \varphi = \rho \sin \chi,$$

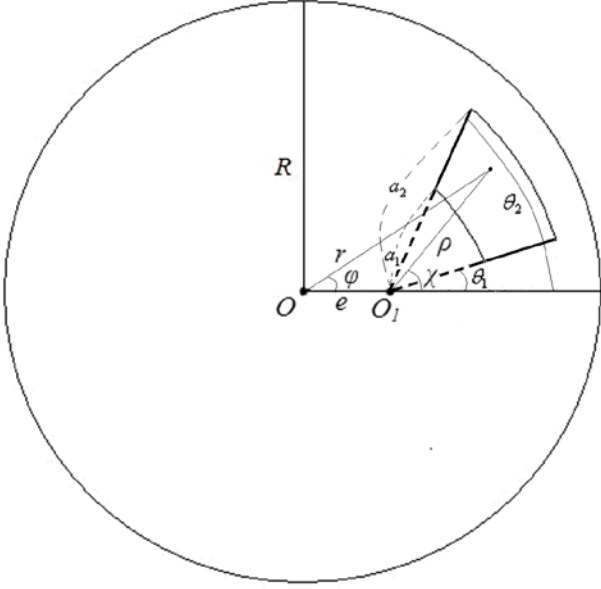
Уравнение контакта (1) принимает вид

$$k_0 \sigma(\rho, \chi) + \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{a_1}^{a_2} G(\rho, \chi, \xi, \eta) \sigma(\xi, \eta) \xi d\xi d\eta = \gamma.$$

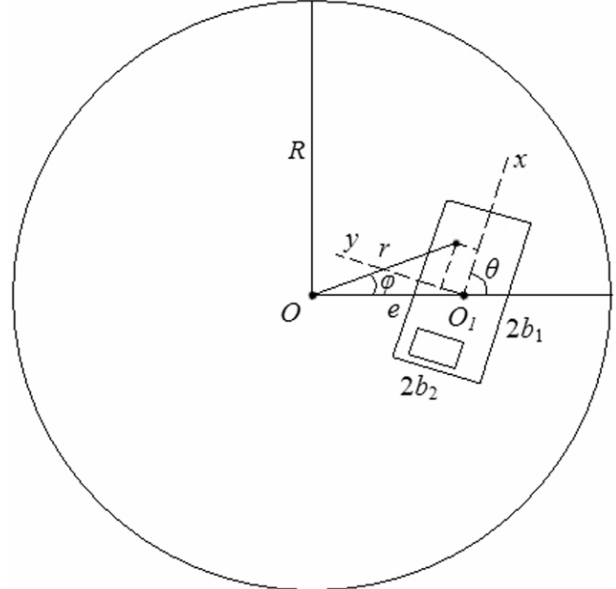
Тогда контактное давление в узлах сетки может быть определено из системы линейных алгебраических уравнений

$$k_0 \sigma(\rho_{spq}, \chi_{tpq}) + \sum_{k=1}^{h_r} \sum_{l=1}^{h_\varphi} (b_{kl} - a_{kl})(d_{kl} - c_{kl}) \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N G_{r,\varphi}(\xi_{ikl}, \eta_{jkl}) \xi_{ikl} A_i A_j = \gamma,$$

где  $G_{r,\varphi} \equiv G(r_{spq}, \varphi_{tpq}, \xi_{ikl}, \eta_{jkl}) = \sum_{m_0=0}^m G_{m_0}(r_{spq}, \xi_{ikl}) \cos m_0(\varphi_{tpq} - \eta_{jkl})$ .



**Рис. 1.** Постановка задачи для случая контакта круглой пластины и штампа в форме сектора кольца



**Рис. 2.** Постановка задачи для случая контакта круглой пластины и прямоугольного штампа с вырезом

Пусть штамп имеет прямоугольную форму (рис. 2). В качестве  $\alpha_1, \beta_1$  выберем декартову систему координат  $x, y$  с центром в точке  $O_1$ . Тогда

$$r \cos \varphi = e + x \cos \theta - y \sin \theta, \quad r \sin \varphi = x \sin \theta + y \cos \theta.$$

Уравнение контакта (1) принимает вид

$$k_0 \sigma(x, y) + \int_{-b_1}^{b_1} \int_{-b_2}^{b_2} G(x, y, \xi, \eta) \sigma(\xi, \eta) d\xi d\eta = \gamma,$$

и задача отыскания контактного давления в узлах сетки сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений

$$k_0 \sigma(x_{spq}, y_{tpq}) + \sum_{k=1}^{h_x} \sum_{l=1}^{h_y} (b_{kl} - a_{kl})(d_{kl} - c_{kl}) \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N G_{x,y} \sigma(\xi_{ikl}, \eta_{jkl}) A_i A_j = \gamma, \quad (11)$$

где  $G_{x,y} \equiv G(x_{spq}, y_{tpq}, \xi_{ikl}, \eta_{jkl}) = \sum_{m_0=0}^m G_{m_0}(x_{spq}, \xi_{ikl}) \cos m_0(y_{tpq} - \eta_{jkl})$ .

В работе рассмотрена возможность добавления вырезов в прямоугольный штамп, что позволяет решать задачи для штампов разнообразных форм. В случае, когда рассматривается штамп, имеющий вырезы, система (11) составляется с учетом отсутствия контактных напряжений внутри вырезов. Соответствующие слагаемые в ее уравнениях не должны участвовать. Таким образом, число неизвестных равно числу уравнений.

Анализ сходимости расчетной схемы проводился на основе численных экспериментов. Исследовалось влияние на конечный результат количества членов ряда функции Грина, а также детализации сетки. Результаты двух таких численных экспериментов, проведенных для задачи контакта пластины со штампом в форме



сектора (рис. 11) при условиях свободных краев пластины и  $e = 0.7$  м, представлены в табл. 1, 2.

**Таблица 1.** Влияние количества членов ряда функции Грина  $m$  на напряжения. Штамп в форме сектора (рис. 11). 5184 узловые точки.

$m$	23	30	40	50	70	100
Макс.напр., (МПа)	$1.159 \cdot 10^3$	$1.155 \cdot 10^3$	$1.152 \cdot 10^3$	$1.150 \cdot 10^3$	$1.149 \cdot 10^3$	$1.148 \cdot 10^3$
Изменение	-	-0.4%	-0.3%	-0.1%	-0.1%	-0.1%
Мин. напр., (МПа)	$-2.336 \cdot 10^2$	$-2.264 \cdot 10^2$	$-2.128 \cdot 10^2$	$-2.033 \cdot 10^2$	$-1.972 \cdot 10^2$	$-1.983 \cdot 10^2$
Изменение	-	-3.1%	-6.0%	-4.5%	-3.0%	0.5%

**Таблица 2.** Влияние детализации сетки на напряжения. Штамп в форме сектора (рис. 11).  $m = 23$ .

	Количество узлов			
	576	2304	5184	9216
Макс. напр., (МПа)	$1.129 \cdot 10^3$	$1.152 \cdot 10^3$	$1.159 \cdot 10^3$	$1.163 \cdot 10^3$
Изменение	-	2.0%	0.7%	0.3%
Мин. напр., (МПа)	$-2.333 \cdot 10^2$	$-2.335 \cdot 10^2$	$-2.336 \cdot 10^2$	$-2.337 \cdot 10^2$
Изменение	-	0.1%	0.0%	0.1%

При проведении расчетов было принято:  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $\nu = 0.3$ ,  $k = 2 \cdot 10^8$  Н/м<sup>3</sup>,  $h = 0.05$  м,  $R = 1$  м,  $\gamma = 0.005$  м, количество точек Гаусса по каждой из координат равно 3 (аналогичные параметры расчетов были приняты и при решении остальных рассмотренных в работе задач).

Приведенные данные показывают, что по мере увеличения количества членов ряда функции Грина  $m$  максимальные и минимальные напряжения претерпевают все меньшие изменения. Аналогичным образом на конечные результаты влияет и сгущение сетки узлов. Таким образом, данные численных экспериментов позволяют сделать вывод о наличии сходимости расчетной схемы.

Представленный выше алгоритм численного решения контактных задач был реализован в виде двух компьютерных программ, работающих совместно. Первая программа содержит оконный интерфейс, работая с которым пользователь может установить исходные параметры расчета: механические характеристики, размеры штампа и пластины, эксцентриситет и ориентацию штампа на пластине, шаг разбиения сетки, положение вырезов в штампе, если они есть. После того, как исходные параметры установлены, программа производит построение сетки узлов и вычисляет в каждой ее точке значения функций Кельвина с учетом перехода от системы координат  $\alpha_2, \beta_2$  к системе координат  $\alpha_1, \beta_1$ . Также производится вычисление функций Кельвина и их производных на границе пластины. Результаты всех вычислений записываются на жесткий диск, после чего запускается вторая

программа, непосредственно реализующая алгоритм решения контактной задачи. В начале своей работы данная программа считывает с жесткого диска результаты вычислений предыдущего этапа. После этого запускается алгоритм составления и решения системы линейных алгебраических уравнений (2). Полученные в результате значения контактного давления в узлах сетки записываются в файл в формате, пригодном для использования в программе визуализации.

С помощью представленной в работе численно-аналитической методики исследовалось распределение контактных напряжений в зависимости от формы штампа, эксцентриситета его положения, угла поворота и условий закрепления пластины. Поля распределения строились по безразмерным контактным напряжениям, которые вычислялись по формулам

$$\sigma^*(\alpha_1, \beta_1) = \frac{S_\Omega \sigma(\alpha_1, \beta_1)}{P}$$

где  $S_\Omega$  – площадь области контакта, а  $P$  – сила, которая дается выражением

$$P = \iint_{\Omega} \sigma(\alpha_1, \beta_1) d\Omega.$$

Для штампов, имеющих форму, основой которой является сектор кольца, выражения для  $S_\Omega$  и  $P$  принимают вид:

$$S_\Omega = \frac{(\theta_2 - \theta_1)(a_2^2 - a_1^2)}{2}, \quad P = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{a_1}^{a_2} \sigma(\rho, \chi) \rho d\rho d\chi.$$

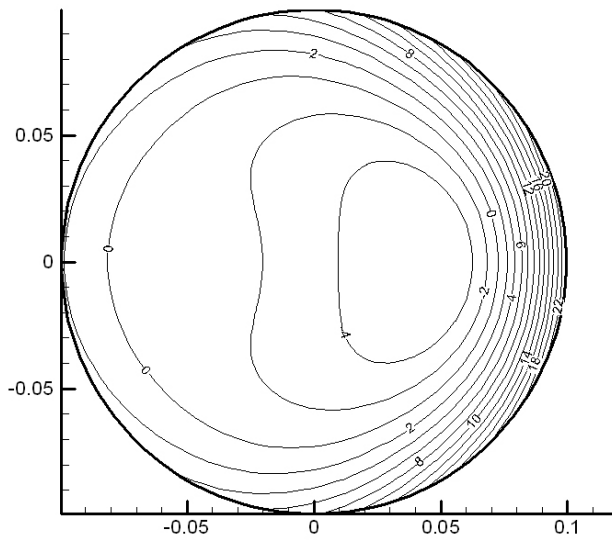
Для прямоугольных штампов с учетом вырезов

$$S_\Omega = 4b_1b_2 - S_0, \quad P = \int_{-b_1-b_2}^{b_1} \int_{-b_1-b_2}^{b_2} \sigma(x, y) dx dy$$

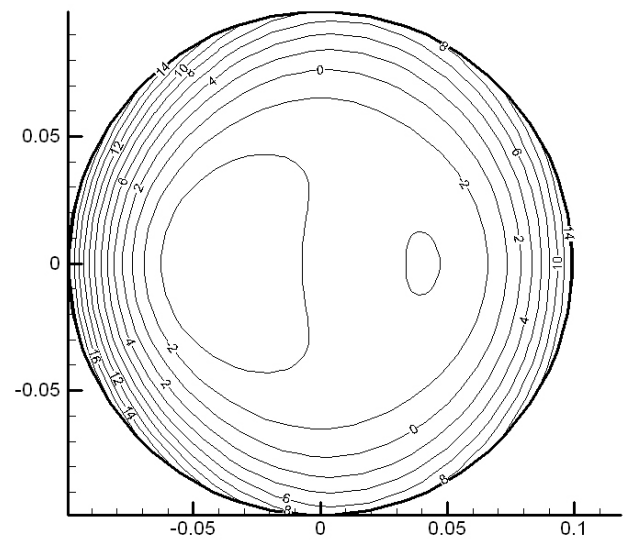
где  $S_0$  – площадь вырезанных из штампа фрагментов.

Ниже на рис. 3-14 представлены поля распределения контактных напряжений для ряда частных случаев.

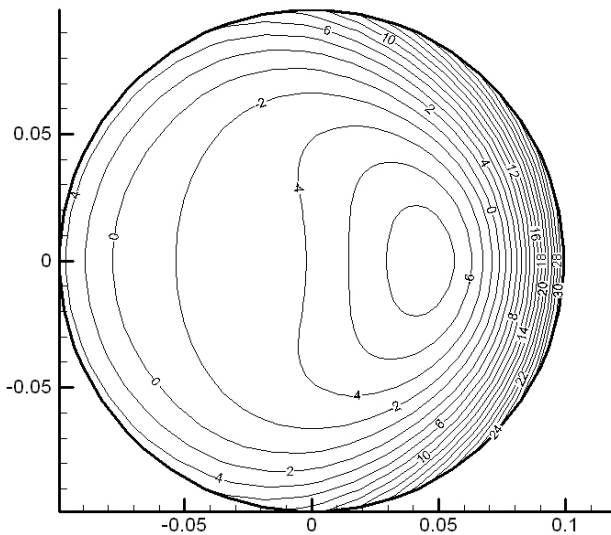
Рис. 3-5 иллюстрируют влияние условий на границе пластины в задаче для круглого штампа, центр которого находится на расстоянии  $e = 0.7$  м от центра пластины. При условии жесткого закрепления (рис. 3) максимальные напряжения возникают в краевой зоне области контакта, обращенной в сторону границы пластины. Зона минимальных напряжений имеет смещение также в эту сторону. При условии свободного края (рис. 4), напротив, максимальные напряжения возникают в краевой зоне области контакта, обращенной к центру пластины. Зона минимальных напряжений также имеет смещение в этом направлении.



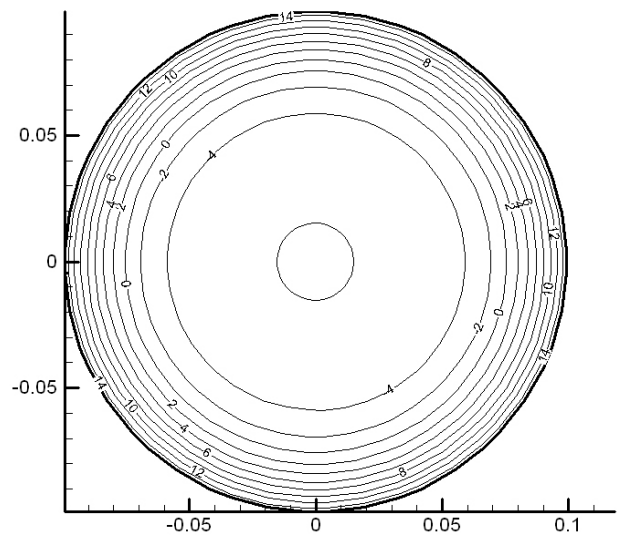
**Рис. 3.** Круглый штамп. Края пластины жестко закреплены,  $e = 0.7$  м



**Рис. 4.** Круглый штамп. Края пластины свободны,  $e = 0.7$  м



**Рис. 5.** Круглый штамп. На краях пластины шарнирное закрепление,  $e = 0.7$  м



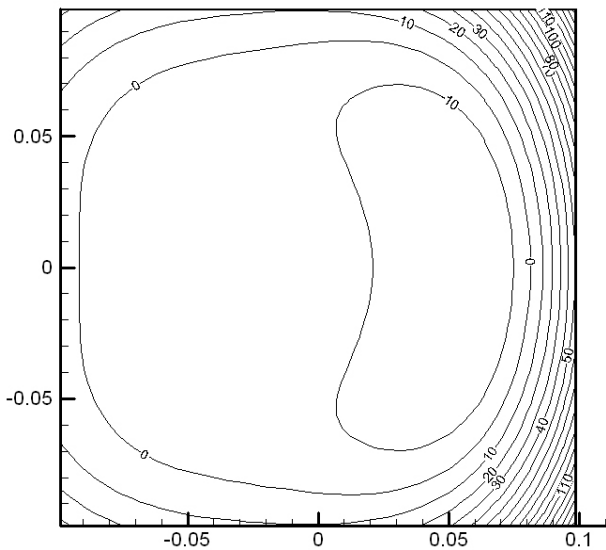
**Рис. 6.** Круглый штамп. Края пластины жестко закреплены,  $e = 0.005$  м

При условии шарнирного закрепления (рис. 5) картина распределения контактных напряжений имеет качественное сходство с картиной распределения в случае жесткой заделки.

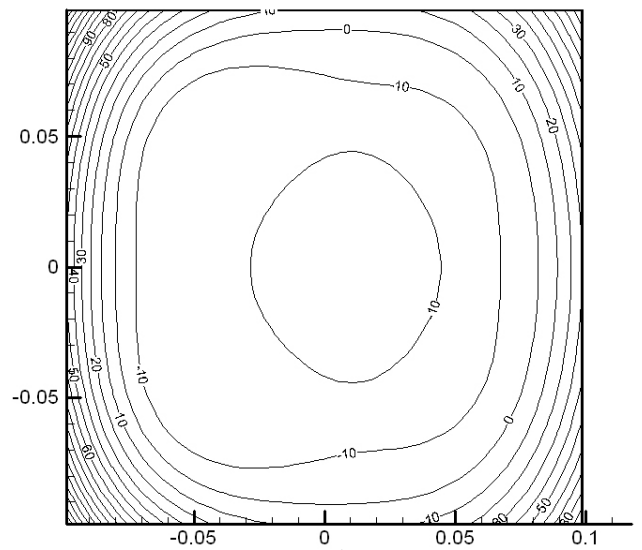
Отметим, что во всех трех случаях имеет место симметрия в распределении контактных напряжений относительно прямой, проходящей через центры пластины и штампа.

На рис. 6 представлено решение задачи для круглого штампа, центр которого почти совпадает с центром пластины. Наблюдается осесимметричная картина. Изолинии равных напряжений представляют собой концентрические окружности. Максимальные напряжения наблюдаются на краю области контакта. По мере приближения к ее центру уровень напряжений снижается и в центре достигает минимальных значений.

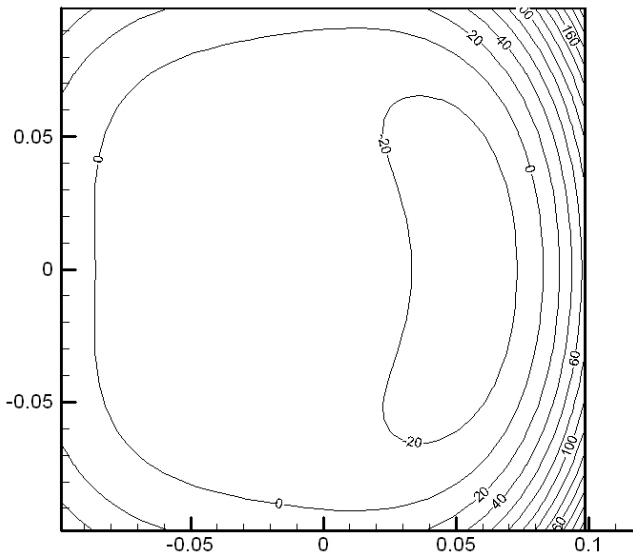
Рис. 7-9 иллюстрируют влияние условий на границе пластины на распределение контактных напряжений в задаче для квадратного штампа.



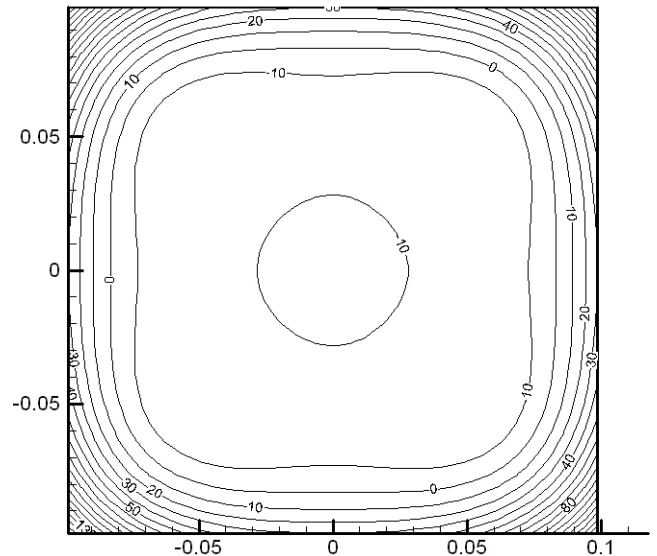
**Рис. 7.** Квадратный штамп. Края пластины жестко закреплены,  $e = 0.7$  м



**Рис. 8.** Квадратный штамп. Края пластины свободны,  $e = 0.7$  м



**Рис. 9.** Квадратный штамп. На краях пластины шарнирное закрепление,  $e = 0.7$  м



**Рис. 10.** Квадратный штамп. Края пластины жестко закреплены,  $e = 0.005$  м

При условии жесткого закрепления (рис. 7) максимальные напряжения возникают в угловых зонах области контакта, расположенных ближе к краю пластины. Отметим, что зона минимальных напряжений смещена в этом же направлении. При условии свободного края (рис. 8) максимальные напряжения наблюдаются в угловых зонах, расположенных ближе к центру пластины. Контур зоны минимальных напряжений имеет вид сложной замкнутой кривой, большая часть которой также смещена по направлению к центру пластины.

В случае шарнирного закрепления пластины (рис. 9) наблюдается картина качественно сходная с картиной распределения при условии жесткой заделки. Максимальные напряжения наблюдаются в угловых зонах области контакта, которые находятся ближе к краю пластины. Зона минимальных напряжений имеет смещение также в эту сторону.

Отметим, что поля распределения для всех трех случаев обладают симметрией относительно оси абсцисс.

На рис. 10 представлено решение задачи для квадратного штампа, расположенного почти в центре пластины. В распределении контактных напряжений присутствует осевая симметрия. Максимальные напряжения наблюдаются в угловых зонах области контакта. Зона минимальных напряжений расположена в центре и имеет форму, близкую к окружности.

В массиве полученных в работе данных наблюдаются некоторые общие закономерности распределения контактных напряжений при взаимодействии пластины на упругом основании с жесткими штампами:

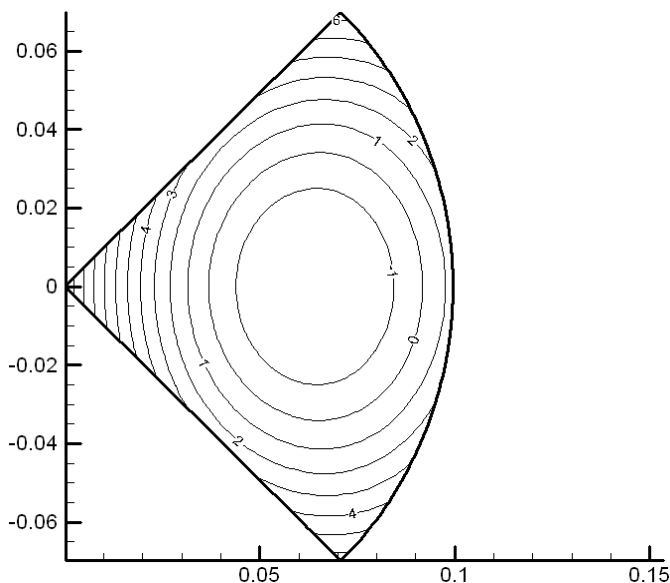
1. При условии жесткого закрепления пластины максимальные напряжения возникают в граничных зонах области контакта, которые расположены ближе к краю пластины. При условии свободного края, наоборот, максимальные напряжения возникают в граничных зонах, которые расположены ближе к центру пластины.

2. Если область контакта имеет угловые зоны, то именно в них при соответствующих граничных условиях наблюдается наибольшая концентрация напряжений.

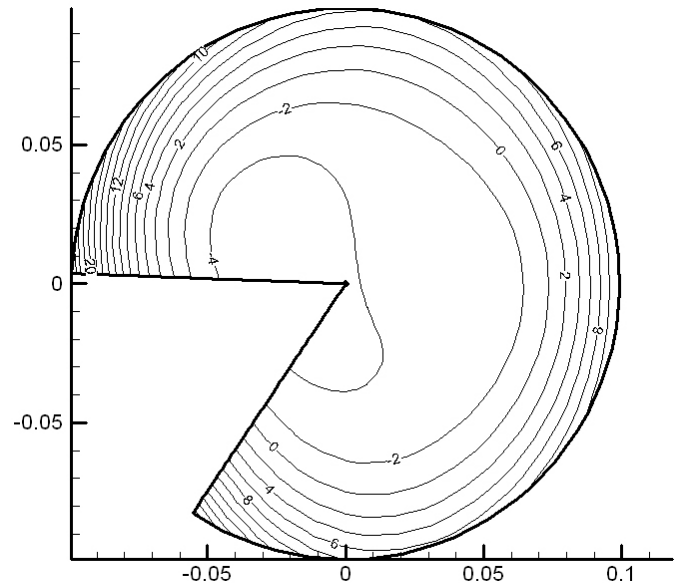
3. Условия жесткого и шарнирного закрепления дают качественно близкие поля распределения контактных напряжений.

4. Когда центры пластины и штампа, имеющего оси симметрии, почти совпадают, распределение контактных напряжений имеет симметричный вид, причем его оси симметрии совпадают с осями симметрии штампа.

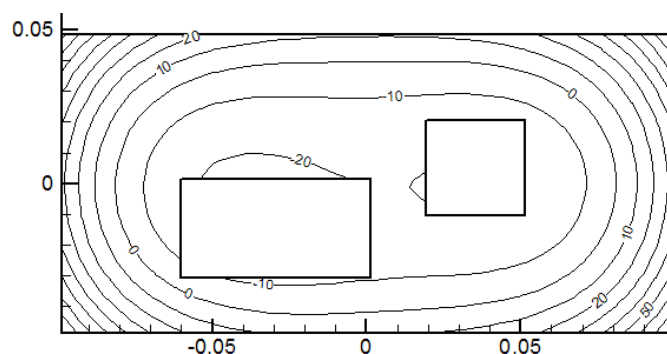
На рис. 11-14 в качестве демонстрации возможностей представленной в работе методики приводятся поля распределения напряжений для штампов различных форм при различных условиях закрепления и эксцентриситетах.



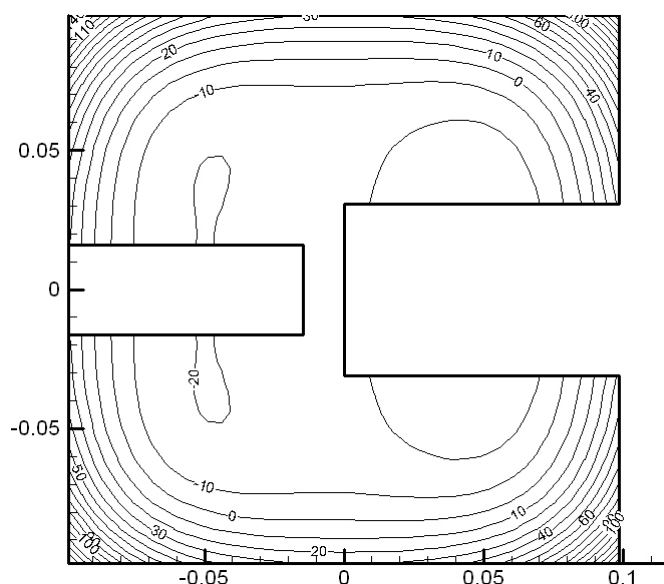
**Рис. 11.** Штамп в форме сектора. Края пластины свободны,  $e = 0.7$  м



**Рис. 12.** Штамп в форме незаконченного круга. Края пластины свободны,  $e = 0.7$  м



**Рис. 13.** Прямоугольный штамп с двумя произвольными вырезами внутри. На краях пластины жесткое закрепление,  $e = 0.005$  м



**Рис. 14.** Квадратный штамп с двумя боковыми вырезами. На краях пластины жесткое закрепление,  $e = 0.005$  м

Отметим, что разработанная методика обладает достаточно широкими возможностями и при минимальной модификации может быть использована и для решения ряда других классов контактных задач.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

Сформулируем основные результаты и выводы данного диссертационного исследования.

1. Разработан метод численно-аналитического решения статических двумерных задач контактного взаимодействия пластин на упругом основании с жесткими штампами.
2. Метод реализован в виде компьютерной программы и применен к решению задач взаимодействия круглых пластин на упругом основании с жесткими штампами различных форм.
3. Получены поля распределения контактных напряжений для широкого спектра частных случаев и исследована их зависимость от формы штампа, эксцентриситета его положения и угла поворота, а также от условий на границе пластины.

## СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

### В рецензируемых журналах из перечня ВАК Министерства образования и науки РФ:

1. Егоров, Д.Л. Исследование контактного взаимодействия круглых пластин со штампами на основе численно-аналитической методики / Д.Л. Егоров, С.А. Кузнецов // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. физ.-матем. науки. – 2010. – Т. 152, кн. 4. – С. 127–134.

2. Егоров, Д.Л. Контактное взаимодействие круглых пластин на упругом основании со штампами различных форм / Д.Л. Егоров, С.А. Кузнецов // Научно-технический вестник Поволжья. – 2011. – № 5. – С. 32–35.

### **В других изданиях:**

3. Егоров, Д.Л. Контактная задача для круглой пластины, взаимодействующей с жестким штампом / Д.Л. Егоров, С.А. Кузнецов // Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского. Материалы VI молодежной научной школы-конференции «Лобачевские чтения – 2007». – Казань: Казан. гос. ун-т, 2007. – Т. 36. – С. 75–76.

4. Егоров, Д.Л. Численно-аналитическое исследование контактного взаимодействия круглых пластин с жесткими штампами / Д.Л. Егоров, С.А. Кузнецов // Актуальные проблемы нелинейной механики оболочек: Материалы международного семинара, посвященного памяти заслуженного деятеля науки ТАССР проф. А.В. Саченкова. – Казань: Изд-во Казан. гос. ун-та, 2008. – С. 53–54.

5. Егоров, Д.Л. Численно аналитический метод решения контактных задач теории пластин / Д.Л. Егоров, С.А. Кузнецов // X Международный семинар «Супервычисления и математическое моделирование». Тезисы. – Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2008. – С. 77–78.

6. Егоров, Д.Л. Решение контактной задачи для круглой пластины численно-аналитическим методом / Д.Л. Егоров, С.А. Кузнецов // Проблемы нелинейной механики деформируемого твердого тела: Труды Второй международной конференции. – Казань: Казан. гос. ун-т, 2009. – С. 159–161.

7. Егоров, Д.Л. Методика численного решения задач контактного взаимодействия пластин со штампами / Д.Л. Егоров, С.А. Кузнецов // Актуализация социально-экономического и естественно-научного образования в науке и предпринимательстве: Материалы II международного студенческо-аспирантского форума. – Казань: Отечество, 2009. – С. 42–46.

8. Егоров, Д.Л. Влияние угла поворота штампа на распределение контактных напряжений / Д.Л. Егоров, С.А. Кузнецов // Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского. Материалы IX молодежной научной школы-конференции «Лобачевские чтения – 2010». – Казань: Казан. гос. ун-т, 2010. – Т. 40. – С. 129–131.

9. Егоров, Д.Л. Влияние граничных условий и угла поворота штампа на распределение контактных напряжений / Д.Л. Егоров, С.А. Кузнецов // Актуализация социально-экономического и естественно-научного образования в науке и предпринимательстве: Материалы III международного студенческо-аспирантского форума. – Казань: Отечество, 2010. – С. 22–28.

10. Егоров, Д.Л. Влияние ориентации прямоугольного штампа при контакте с круглой пластиной / Д.Л. Егоров, С.А. Кузнецов // XII Международный семинар «Супервычисления и математическое моделирование». – Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2011. – С. 173–181.

11. Егоров, Д.Л. Влияние формы штампа на распределение контактных напряжений / Д.Л. Егоров, С.А. Кузнецов // Научная и информационно-аналитическая база инновационного предпринимательства: Материалы IV международного студенческо-аспирантского форума. – Казань: «Печать-Сервис XXI век», 2011. – С. 354–359.

Подписано в печать 17.11.2011. Формат 60×84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>  
Тираж 120 экз. Усл. печ. л. 1,0

Отпечатано в множительном центре  
Института истории АН РТ  
г. Казань, Кремль, подъезд 5  
Тел. (843) 292-95-68, 292-18-09